Topologie (partie 1 – classification des surfaces)

Alex Provost

Résumé

La topologie est la branche des mathématiques qui étudie les espaces et les fonctions continues entre ceux-ci. Des espaces sont topologiquement équivalents, ou *homéomorphes*, s'ils sont reliés par une bijection qui est continue dans les deux directions. Dans cet atelier, on se propose d'introduire les notions élémentaires de topologie et de les appliquer à l'étude du problème classique de la classification des surfaces fermées.

Les seuls prérequis sont un désir d'apprendre et une vague intuition des concepts topologiques amenés dans un cours de calcul ou d'analyse : ensembles ouverts, fermés, compacts, connexes, fonctions continues... Ces concepts, qui dépendent *a priori* de la structure métrique d'un espace (e.g., de la notion de distance dans $\mathbb{R}^n$), sont en fait purement topologiques (i.e., s'expriment uniquement en termes d'ouverts), et seront rigoureusement définis et mis en évidence par des exemples.

On propose ensuite deux approches au problème de classification :

1. Une approche élémentaire à saveur topologique et combinatoire [1]. On utilise le fait que toute surface admet une triangulation (Radó, 1925) pour associer à chaque classe d'homéomorphisme de surfaces une « forme canonique » polygonale qui représente la surface qu'on aurait décousue.
2. Une approche plus moderne à saveur difféo-topologique [2]. En utilisant le fait que toute surface S admette une énorme collection de fonctions lisses $f : S \to \mathbb{R}$ dont les points critiques sont non dégénérés (*fonctions de Morse*) on peut étudier S en analysant le comportement le f autour de ses points critiques. On réalise alors qu'il y a très peu de situations différentes qui peuvent se produire (ce qui n'est plus du tout le cas en dimension ≥ 3).

Finalement, en bonus, si le temps le permet, on va conclure avec une preuve topologique de l'infinitude des nombres premiers due à Furstenberg (tel que promis !).

Références

[1] William S Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*, volume 127. Springer, 1991.

[2] Simon Kirwan Donaldson. *Riemann Surfaces*, volume 22. Oxford University Press Oxford, 2011.