Introduction à la topologie : classification des surfaces

Notes accompagnant deux exposés

Alex Provost

Mai 2014

Résumé

La topologie est la branche des mathématiques qui étudie les espaces et les fonctions continues entre ceux-ci. Des espaces sont topologiquement équivalents, ou *homéomorphes*, s'ils sont reliés par une bijection qui est continue dans les deux directions. Dans cet atelier, on se propose d'introduire les notions élémentaires de topologie et de les appliquer à l'étude du problème classique de la classification des surfaces fermées.

Les seuls prérequis sont un désir d'apprendre et une vague intuition des concepts topologiques amenés dans un cours de calcul ou d'analyse : ensembles ouverts, fermés, compacts, connexes, fonctions continues... Ces concepts, qui dépendent *a priori* de la structure métrique d'un espace (e.g., de la notion de distance dans $\mathbb{R}^n$), sont en fait purement topologiques (i.e., s'expriment uniquement en termes d'ouverts), et seront rigoureusement définis et mis en évidence par des exemples.

On propose ensuite deux approches au problème de classification :

(1) Une approche élémentaire à saveur topologique et combinatoire [3]. On utilise le fait que toute surface admet une triangulation (Radó, 1925) pour associer à chaque classe d'homéomorphisme de surfaces une « forme canonique » polygonale qui représente la surface qu'on aurait décousue.

(2) Une approche plus moderne à saveur difféo-topologique [1]. En utilisant le fait que toute surface S admette une énorme collection de fonctions lisses $f : S \to \mathbb{R}$ dont les points critiques sont non dégénérés (*fonctions de Morse*) on peut étudier S en analysant le comportement le f autour de ses points critiques. On réalise alors qu'il y a très peu de situations différentes qui peuvent se produire (ce qui n'est plus du tout le cas en dimension ≥ 3).

Finalement, en bonus, si le temps le permet, on va conclure avec une preuve topologique de l'infinitude des nombres premiers due à Furstenberg (tel que promis !).

1 Introduction à la topologie

1.1 Des espaces métriques aux espaces topologiques

On connait déjà plusieurs exemples d'**espaces métriques** : ce sont des espaces (X, d) munis d'une **métrique** (fonction de distance)

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

qui est définie positive, symétrique, et qui satisfait l'inégalité du triangle.

Exemples.

(1) L'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, d)$. Ici

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

est la métrique euclidienne.

(2) Tout sous-ensemble $A \subset (X, d)$ avec la métrique induite $d|_A$, i.e., la distance telle que mesurée dans l'espace ambiant. Par exemple, la **n-sphère**

$$S^n = \left\{ (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_i x_i^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

est aussi munie de la distance euclidienne (remarquez que ce n'est *pas* la distance mesurée *sur* la sphère).

(3) Un espace vectoriel normé $(V, \|\cdot\|)$ muni de la distance $d(u, v) = \|u - v\|$.

En présence d'un espace métrique (X, d) on a une notion familière d'ensemble ouvert : on dit que $U \subset X$ est **ouvert** si en chaque point $x \in U$ il existe $\epsilon > 0$ tel que la boule ouverte centrée en x de rayon ϵ,

$$B_x(\epsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\},$$

soit entièrement comprise dans U, i.e., $B_x(\epsilon) \subset U$. On dit que $F \subset X$ est **fermé** si $X - F$ est ouvert.

Remarques.

(1) L'ensemble vide et X sont ouverts et fermés.

(2) L'union arbitraire d'ouverts est ouvert (trivialement).

(3) L'intersection d'un nombre *fini* d'ouverts $U_1, \ldots, U_n$ est ouverte. Si l'intersection est vide, il n'y a rien à faire. Sinon, soit $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$. Alors x appartient à n boules ouvertes $B_x(\epsilon_i)$ correspondant aux U_i. Il suffit alors de prendre la boule de rayon $\min(\epsilon_i)$ (on utilise la finitude ici).

La boule $B_x(\epsilon)$ étant évidemment ouverte sous cette définition, on a alors caractérisé tout ouvert d'un espace métrique :

Proposition 1.1 (Base pour la topologie métrique)**.** *Un sous-ensemble $U \subset (X, d)$ est ouvert si et seulement s'il est une réunion de boules ouvertes $B_x(\epsilon)$, avec $x \in U$.* □

Remarque. On dit alors que les boules ouvertes forment une **base** pour la topologie d'un espace métrique.

Deux espaces métriques sont considérés équivalents s'ils sont reliés par une isométrie bijective, i.e., une bijection qui préserve les distances. De notre point de vue, les espaces métriques sont trop rigides, ou pas assez malléables. Par exemple, on aimerait considérer la sphère S^2 comme équivalente à une sphère aplatie. Ou bien, on aimerait considérer l'intervalle ouvert $(0, 1)$ comme équivalent à la droite $\mathbb{R}$. Pour ce faire, il suffit de supprimer toute référence à la métrique et d'extraire l'information topologique de nos espaces, i.e., leurs ouverts.

1.2 Notions élémentaires de topologie

Définition. Un **espace topologique** $(X, \mathcal{T})$ est un ensemble de points X muni d'un ensemble d'**ouverts** $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, appelé la **topologie** de X, satisfaisant :

(i) L'ensemble vide et X sont ouverts, i.e.,

$$\emptyset, X \in \mathcal{T}.$$

(ii) L'union arbitraire d'ouverts est ouvert, i.e.,

$$U_i \in \mathcal{T} \implies \bigcup_i U_i \in \mathcal{T}.$$

(iii) L'intersection d'un nombre *fini* d'ouverts $U_1, \ldots, U_n$ est ouverte, i.e.,

$$U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T} \implies \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}.$$

On dit qu'un sous-ensemble $F \subset X$ est **fermé** si $X - F$ est ouvert. Un **voisinage** de $x \in X$ est un sous-ensemble de X contenant un ouvert contenant x.

Remarque. On supprime généralement la topologie $\mathcal{T}$ de la notation. Son existence est implicite du fait qu'on parle d'un espace topologique X.

Exemple (Topologie métrique)**.** Comme on l'a vu plus haut, tout espace métrique (X, d) est un espace topologique, dont les ouverts sont les unions de boules ouvertes.

Définition (Comparaison des topologies)**.** Soient T_1 et T_2 deux topologies sur X. On dit que T_1 est **plus faible** que T_2, ou que T_2 est **plus forte** que T_1, si $T_1 \subset T_2$; autrement dit, la première topologie possède moins d'ouverts que la deuxième.

Définition. Une application $f : X \to Y$ entre espaces topologiques est dite **continue** si elle tire en arrière des ouverts de Y sur des ouverts de X. Autrement dit, on requiert que la préimage

$$f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\} \subset X$$

soit ouverte pour tout ouvert $V \subset Y$.

Intuitivement, les fonctions continues sont celles qui envoient les points proches sur des points proches.

Exercice 1. Vérifiez que ceci coïncide avec la définition usuelle de continuité dans les espaces métriques : $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ est continue en $x_0 \in X$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in X$,

$$d_1(x, x_0) < \delta \implies d_2(f(x), f(x_0)) < \epsilon;$$

f est continue si elle est continue en tout $x_0 \in X$.

Exercice 2. Montrez que f est continue si et seulement si elle tire en arrière des fermés sur des fermés.

Définition (Topologie d'un sous-espace)**.** Soit $A \subset X$ un sous-ensemble quelconque d'un espace topologique X. On munit par défaut A de la topologie la plus faible qui rend l'inclusion $A \hookrightarrow X$ continue. Plus précisément, $U \subset A$ est ouvert si et seulement si U est l'intersection d'un ouvert de X avec A : il existe $V \subset X$ ouvert tel que $U = V \cap A$. On dit alors que A, muni de cette topologie, est un **sous-espace** de X.

Exercice 3. Vérifiez que la topologie d'un sous-espace est compatible avec la topologie de la métrique induite au sens suivant : soit (X, d) un espace métrique (aussi vu comme espace topologique avec la topologie métrique), et soit $A \subset X$ un sous-ensemble. Montrez alors que la topologie de A comme sous-espace coïncide avec la topologie de $(A, d|_A)$ comme espace métrique.

Définition. On dit qu'une application $f : X \to Y$ entre espaces topologiques est **ouverte** si elle envoie des ouverts sur des ouverts, et **fermée** si elle envoie des fermés sur des fermés.

Malgré que les notions d'application ouverte et fermée soient assez naturelles, elles sont moins importantes que celle d'application continue. Comme le montre le prochain exercice, ces notions sont toutes indépendantes.

Exercice 4. Trouvez un exemple...

(1) D'une application continue et ouverte, mais pas fermée (indice : une projection $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$).

(2) D'une application continue et fermée, mais pas ouverte (indice : $f(x) = x^2$).

(3) D'une application ouverte et fermée, mais pas continue (indice : l'inverse de l'application (1.2.1) ci-dessous).

On définit maintenant la notion fondamentale d'équivalence d'espaces topologiques :

Définition. Une application $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est appelé un **homéomorphisme** si elle est bijective, continue, et d'inverse continue. Intuitivement, deux espaces sont homéomorphes si on peut « étirer » l'un en l'autre. On note la relation d'homéomorphisme par le symbole « $\cong$ ».

Exemples.

(1) L'intervalle ouvert $(0, 1)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$. Un homéomorphisme est donné par
$$\tan(\pi x - \pi/2)|_{(0,1)} : (0, 1) \to \mathbb{R}.$$

(2) La n-sphère privée d'un point (disons, $P = (1, 0, \dots, 0)$) est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ via la **projection stéréographique** $f : S^n - P \to \mathbb{R}^n$ donnée par
$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{1 - x_0}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_0}\right).$$

(3) Une tasse de café est homéomorphe à un tore.

(4) Il existe des bijections continues qui ne sont *pas* des homéomorphismes ! Par exemple, l'application d'enroulement de $[0, 1)$ autour du cercle S^1 donnée par $f : [0, 1) \to S^1$,
$$f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), \tag{1.2.1}$$
est continue et bijective, mais son inverse n'est pas continue en $(1, 0) \in S^1$.

(5) Il semble intuitivement plausible que $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ si et seulement si $n = m$. Cependant, une preuve rigoureuse de ce fait requiert des outils assez sophistiqués de topologie algébrique (par exemple, l'homologie singulière d'un espace topologique pour démontrer le théorème d'invariance du domaine de Brouwer ou le théorème de séparation de Jordan-Brouwer).

Après tout, l'intuition est parfois trompeuse ; on pourrait penser qu'il n'existe aucune application continue et surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$, alors que de telles « courbes remplissant le plan » existent bel et bien !

Exercice 5. Montrez qu'une condition suffisante pour qu'une bijection continue $f : X \to Y$ soit un homéomorphisme est que f soit ouverte ou fermée.

Définition. Une **base** pour un espace topologique X est une collection d'ouverts $\mathcal{B}$ tel que tout ouvert $U \subset X$ puisse s'écrire comme réunion d'ouverts basiques : il existe $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ tel que $U = \bigcup \mathcal{B}'$.

Proposition 1.2 (Caractérisation des bases)**.** *Une base $\mathcal{B}$ pour un espace topologique X satisfait les conditions suivantes :*

(i) La base recouvre X, i.e.,

$$X = \bigcup \mathcal{B};$$

(ii) L'intersection de deux ouverts basiques est une réunion d'ouverts basiques, i.e.,

$$B_1, B_2 \in \mathcal{B} \implies \exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B} : B_1 \cap B_2 = \bigcup \mathcal{B}'.$$

Réciproquement, une collection de sous-ensembles $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ satisfaisant les conditions (i) et (ii) forme une base pour une unique topologie sur X. □

Exercice 6. Démontrez la proposition ci-dessus.

Définition. Soit X un espace topologique et $A \subset X$ un sous-espace. L'**intérieur** $\operatorname{int} A$ de A est l'union de tous les sous-ensembles de A qui sont ouverts dans X; c'est le plus gros ouvert contenu dans A.

Exercice 7. Montrez que $A \subset X$ est ouvert si et seulement si $A = \operatorname{int} A$.

1.3 Création de nouveaux espaces topologiques à partir d'anciens

On va s'intéresser à trois façons de construire des espaces topologiques : ce sont les notions d'espace produit, d'espace quotient et de recollement.

Définition. Soient X, Y deux espaces topologiques. L'**espace produit** $X \times Y$ est le produit cartésien de X et Y muni de la topologie engendrée par la base

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \text{ est ouvert dans } X \text{ et } V \text{ est ouvert dans } Y\}. \tag{1.3.1}$$

C'est la topologie la plus faible pour laquelle les projections $X \twoheadleftarrow X \times Y \twoheadrightarrow Y$ sont continues.

Exercice 8. Vérifiez que $\mathcal{B}$ est bien une base pour une topologie.

Exemple. Sous cette topologie, les ouverts du plan $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sont des unions de rectangles ouverts. Cette topologie coïncide avec la topologie métrique de $\mathbb{R}^2$ (engendrée par les boules ouvertes).

Nous arrivons maintenant à la notion d'espace quotient, qui est probablement une des plus importante en topologie. C'est elle qui nous permet de manipuler des espaces de manière très précise.

Définition (Topologie quotient)**.** Soit X un espace topologique, Y un ensemble, et $p : X \twoheadrightarrow Y$ une application surjective. La **topologie quotient** induite par p sur Y est la topologie la plus forte qui rend p continue. Plus précisément, $V \subset Y$ est ouvert si et seulement si $p^{-1}(V) \subset X$ est ouvert.

Définition. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un espace topologique X. On munit l'ensemble quotient $X/\sim$ de la topologie quotient induite par la projection canonique $p : X \twoheadrightarrow X/\sim$. On dit alors que $X/\sim$ est un **espace quotient** de X.

Exemple (Le plan projectif)**.** Soit $X = S^2$, la sphère. Soit $\sim$ la relation qui identifie les points antipodaux sur la sphère, i.e., la relation d'équivalence engendrée par $x \sim -x$. L'espace quotient $S^2/\sim$ est appelé le **plan projectif** et noté $\mathbb{R}P^2$.

Cette construction permet en particulier de ramener la totalité d'un sous-espace à un seul point. Soit $A \subset X$ un sous-espace. Soit $\sim$ la relation d'équivalence donnée par « $x \sim y$ si et seulement si $x = y$ ou $x, y \in A$. » Autrement dit, les classes d'équivalence sont A et les singletons $\{x\}$ pour $x \notin A$. Dans ce cas, l'espace quotient $X/\sim$ est noté par X/A. Il s'agit de l'espace X où tous les points de A sont considérés comme étant égaux.

Exemple (La sphère comme deux quotients)**.** On peut obtenir la sphère S^2 de plusieurs façons différentes. On peut partir du disque D^2 (l'ensemble de points du plan à distance ≤ 1 de l'origine) et identifier tout le bord $\partial D^2 \cong S^1$ à un point : $S^2 \cong D^2/\partial D^2$.

On pourrait également partir d'un cylindre $S^1 \times [0,1]$ et recoller le dessus et le dessous : $S^2 \cong (S^1 \times [0,1])/\sim$ où $(x,0) \sim (y,0)$ et $(x,1) \sim (y,1)$ pour tous $x, y \in S^1$.

Exemple (Bouquet de cercles)**.** Soit $X = S^1$ et $A = \{(-1,0),(1,0)\} \subset S^1$. Alors $S^1 \vee S^1 \cong S^1/A$ est un **bouquet de deux cercles**.

Définition. Soit $p : X \twoheadrightarrow Y$ une application surjective entre deux espaces topologiques. On dit que p est une **application quotient** si elle satisfait que $V \subset Y$ est ouvert si et seulement si $p^{-1}(V) \subset X$ est ouvert.

Remarque. Cette notion est plus forte que celle de continuité. Si Y est seulement un ensemble sans structure topologique, la topologie quotient induite par $p : X \twoheadrightarrow Y$ est *l'unique* topologie sur Y telle que p est une application quotient.

Exercice 9. Soit $p : X \twoheadrightarrow Y$ une application entre espaces topologiques qui est surjective et continue. Montrez que si p ouverte ou fermée, alors p est une application quotient.

Exercice 10. Montrez que la composition de deux applications quotient est de nouveau une application quotient.

Ainsi, au lieu de faire deux identifications l'une après l'autre, on peut « tout recoller d'un coup. »

La prochaine proposition caractérise toutes les applications continues sortant d'un espace quotient. Elle est donc très utile, par exemple, pour montrer qu'un certain espace quotient est homéomorphe à un autre espace.

Proposition 1.3. *Soit $p : X \twoheadrightarrow Y$ une application quotient, et $f : Y \to Z$ une application. Alors f est continue si et seulement si $f \circ p : X \to Z$ est continue ; f est une application quotient si et seulement si $f \circ p$ est une application quotient.*

Démonstration. La composition d'applications continues étant continue, et la composition d'applications quotient étant quotient (exercice précédent), les directions « seulement si » sont démontrées.

Supposons que $f \circ p$ est continue, et soit $V \subset Z$ un ouvert. Alors $(f \circ p)^{-1}(V) = p^{-1}(f^{-1}(V))$ est ouvert, d'où $f^{-1}(V)$ est ouvert car p est quotient. Donc f est continue.

Supposons que $f \circ p$ est quotient. Puisque $f \circ p$ est surjective, f l'est aussi. Par le paragraphe précédent, on sait déjà que f est continue. Soit $V \subset Z$ un sous-ensemble ; il reste à vérifier que V est ouvert si $f^{-1}(V)$ l'est. On a que $p^{-1}(f^{-1}(V)) = (f \circ p)^{-1}(V)$ est ouvert car p est quotient ; mais alors V est ouvert car $f \circ p$ est quotient. $\square$

Exercice 11. Soit $p : X \twoheadrightarrow Y$ une application quotient. Considérons la relation d'équivalence $\sim$ sur X donnée par $x \sim y$ si et seulement si $p(x) = p(y)$. Soit $f : X/{\sim} \to Y$ l'application induite par p. Montrez que f est un homéomorphisme.

Ainsi, on peut identifier toute image d'une application quotient à un espace quotient.

On passe maintenant aux derniers ingrédients qui vont nous être utiles pour construire une énorme gamme d'espaces.

Définition (Réunion disjointe)**.** Soit X, Y deux espaces topologiques. On munit leur **union disjointe** $X \sqcup Y$ de la topologie suivante : $U \subset X \sqcup Y$ est ouvert si et seulement si $U \cap X$ est ouvert dans X et $U \cap Y$ est ouvert dans Y. C'est la topologie la plus large pour laquelle les inclusions canoniques $X \hookrightarrow X \sqcup Y \hookleftarrow Y$ sont continues.

Définition (Recollement)**.** Soit X, Y deux espaces topologiques, $A \subset X$ un sous-espace, et $f : A \to Y$ une application continue (appelée **application d'attachement**). On peut « attacher X à Y le long de f » en quotientant l'union disjointe $X \sqcup Y$ par la relation d'équivalence engendrée par $a \sim f(a)$ pour $a \in A$. Cet espace est noté par $Y \cup_f X$. En symboles, on a donc

$$Y \cup_f X = (X \sqcup Y)/\{a \sim f(a)\}$$

Exercice 12. Soit $X = D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ le disque fermé et $A = S^1$ son bord. Essayez de vous convaincre que l'attachement du disque sur $Y = S^1$ le long de $f(z) = z^2$ donne le plan projectif $\mathbb{R}P^2$.

1.4 Quelques propriétés et résultats importants

Définition. Un espace topologique X est **compact** si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement. En symboles, si $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ avec U_i des ouverts, alors il existe $i_1, \ldots, i_n \in I$ tel que $X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.

Les espaces compacts sont ceux qui sont intuitivement « fermés et bornés » (c'est du moins vrai dans $\mathbb{R}^n$ par le théorème d'Heine-Borel). La compacité d'un espace topologique simplifie grandement son étude, puisqu'elle permet souvent d'appliquer des arguments de finitude à l'espace.

Exemple. La n-sphère S^n ainsi que le n-disque D^n sont compacts.

Exercice 13. Montrez que X est compact si et seulement si tout recouvrement de X par des ouverts basiques admet un sous-recouvrement fini.

Proposition 1.4. *Le produit de deux espaces compacts est compact.*

Démonstration. Soit X, Y deux espaces compacts. On connait une base pour le produit $X \times Y$ (cf. (1.3.1)). Par l'exercice précédent, il suffit donc de vérifier que tout recouvrement de $X \times Y$ par des ouverts de la forme $U_i \times V_i$ (où U_i est ouvert dans X et V_i est ouvert dans Y) admet un sous-recouvrement fini.

Pour tout $x \in X$, on a un homéomorphisme $\{x\} \times Y \cong Y$. Ainsi, $\{x\} \times Y$ est compact, d'où on peut recouvrir $\{x\} \times Y$ par un nombre fini de rectangles $U_{x,i} \times V_{x,i}$ ($i = 1, \ldots, n_x$ pour un certain entier n_x dépendant du x choisi). L'intersection finie $U_x = \bigcap_{i=1}^{n_x} U_{x,i}$ est un voisinage ouvert de x, et

$$U_x \times Y \subset \bigcup_{i=1}^{n_x} U_{x,i} \times V_{x,i}.$$

Puisque $X = \bigcup_{x \in X} U_x$ est un recouvrement ouvert et que X est compact, on peut trouver $x_1, \ldots, x_m \in X$ tels que $X = \bigcup_{k=1}^{m} U_{x_k}$.

Mais alors on a exprimé

$$X \times Y = \bigcup_{k=1}^{m} U_{x_k} \times Y = \bigcup_{k=1}^{m} \left(\bigcup_{i=1}^{n_{x_k}} U_{x,i} \times V_{x,i} \right)$$

comme une réunion finie d'ouverts qui ont la forme voulue. □

Exemple (Compacité du tore)**.** Le **tore** $T^2 = S^1 \times S^1$, en tant que produit d'espaces compacts, est compact.

Définition. On dit qu'un espace topologique X est **connexe** si on ne peut pas partitionner X en deux ouverts non vides et distincts. Intuitivement, un ensemble connexe est un ensemble « en un seul morceau. »

Exemple. Les espaces vus jusqu'à présent ($\mathbb{R}^n, S^n, D^n, \mathbb{R}P^2, S^1 \vee S^1$, ...) sont connexes. Une union disjointe $X \sqcup Y$ de deux espaces non vides n'est jamais connexe. Puisque tout espace peut être partitionné en « composantes connexes, » on restreint généralement notre étude aux espaces connexes.

Exercice 14. Montrez que X est connexe si et seulement si les seuls sous-ensembles de X qui sont à la fois ouverts et fermés sont $\emptyset$ et X.

Exercice 15. Montrez que qu'un sous-espace non vide $A \subset X$ n'est *pas* connexe si et seulement s'il existe des ouverts $U, V \subset X$ tels que $A \subset U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$, et $A \cap U \cap V = \emptyset$.

Proposition 1.5. *Soit $f : X \to Y$ une application continue.*

(1) Si X est compact, alors $f(X) \subset Y$ est compact.

(2) Si X est connexe, alors $f(X) \subset Y$ est connexe.

Démonstration.

(1) Soit $f(X) \subset \bigcup_i V_i$ un recouvrement ouvert. Alors

$$X \subset f^{-1}(f(X)) \subset \bigcup_i f^{-1}(V_i)$$

est un recouvrement ouvert de X, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini

$$X = f^{-1}(V_{i_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{i_n}) = f^{-1}(V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_n}).$$

On a alors

$$f(X) = f(f^{-1}(V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_n})) \subset V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_n},$$

qui est le sous-recouvrement recherché.

(2) Supposons que $f(X)$ n'est pas connexe. En particulier, $f(X) \neq \emptyset$. Alors, par l'exercice précédent, il existe des ouverts $U, V \subset Y$ tels que $f(X) \subset U \cup V$, $f(X) \cap U \neq \emptyset$, $f(X) \cap V \neq \emptyset$, et $f(X) \cap U \cap V = \emptyset$. Alors X est la réunion disjointe des ouverts non vides $f^{-1}(U)$ et $f^{-1}(V)$, d'où X n'est pas connexe.

□

Exemple (Compacité et connexité du plan projectif)**.** Le plan projectif $\mathbb{R}P^2$, en tant qu'image continue de la sphère S^2, est compact et connexe.

Définition. Un espace topologique X est **Hausdorff** si toute paire de points distincts peut être séparée par des ouverts : si $x, y \in X$ avec $x \neq y$, alors il existe des ouverts $U \ni x$ et $V \ni y$ tels que $U \cap V = \emptyset$.

Exercice 16. Montrez que $\mathbb{R}P^2$ est Hausdorff.

Généralement, les espaces qui nous intéressent sont Hausdorff. Les espaces qui ne sont pas Hausdorff sont généralement assez étranges, comme celui-ci :

Exemple (La droite à deux origines)**.** Considérons deux copies de la droite réelle, $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \sqcup (\mathbb{R} \times \{1\})$. Soit $\sim$ la relation d'équivalence engendrée par les relations $(x, 0) \sim (x, 1)$ pour $x \neq 0$. Soit $Y = X/\sim$. Alors Y est un espace qui ressemble à $\mathbb{R}$ mais qui possède deux origines. Il a la propriété que tout voisinage de $(0, 0)$ intersecte tous les voisinages de $(0, 1)$; ainsi, Y n'est pas Hausdorff.

Voici maintenant un résultat extrêmement utile qui permet de vérifier que certains espaces sont homéomorphes. On a besoin de deux lemmes faciles, laissés en exercices.

Exercice 17. Soit X un espace compact. Montrez que tout sous-espace fermé $A \subset X$ est compact.

Exercice 18. Soit X un espace Hausdorff. Montrez que tout sous-espace compact $A \subset X$ est fermé.

Proposition 1.6. *Soit X un espace compact, Y un espace Hausdorff, et $f : X \to Y$ une application continue. Alors f est fermée.*

Démonstration. Soit $F \subset X$ un fermé. Par l'exercice 17, F est compact, d'où $f(F)$ est compact par la proposition 1.5. Mais alors, par l'exercice 18, $f(F)$ est fermé ! □

Corollaire 1.7. *Soit $f : X \to Y$ une application continue, avec X compact et Y Hausdorff. Si f est bijective, alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration. Découle immédiatement de la proposition et de l'exercice 5. □

Exemple (Plan projectif comme quotient du disque)**.** Illustrons cette proposition en démontrant rigoureusement que le plan projectif $\mathbb{R}P^2 = S^2/\sim$ (où $\sim$ est la relation antipodale) est homéomorphe au disque D^2 modulo la relation $\sim$ qui identifie les points du bord qui sont opposés.

L'inclusion $\iota : D^2 \hookrightarrow S^2$ du disque à l'hémisphère nord de la sphère, composée avec la projection $S^2 \twoheadrightarrow S^2/\sim$, passe au quotient pour donner une application continue $\tilde{\iota} : D^2/\sim \to S^2/\sim$. Cette application étant clairement bijective, le fait que $D^2/\sim$ est compact et que $S^2/\sim$ est Hausdorff (cf. exercice 16) nous donne l'homéomorphisme voulu.

1.5 Topologie des surfaces

Nous avons maintenant assez d'outils à notre disposition pour définir une surface ou, plus généralement, une variété de dimension n.

Définition. Une **n-variété (topologique)** est un espace Hausdorff et localement euclidien, au sens où chaque point admet un voisinage ouvert homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. Ainsi toute n-variété M est recouverte de **cartes** (U, ϕ), où $U \subset M$ et $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme. On requiert de plus la condition technique qu'une variété doive admette une base dénombrable. Une **surface** est une 2-variété.

Remarque. Avec cette définition, on ne considère pas le disque fermé D^2 comme une surface. C'est plutôt une surface *à bord*. Si on ne le spécifie pas, toute les surfaces que l'on va considérer sont supposées connexes.

On a maintenant besoin d'une opération qui nous permet de coller deux surfaces ensemble.

Définition. Soit S_1, S_2 deux surfaces. Leur **somme connexe** $S_1 \# S_2$ est la surface obtenue en supprimant un disque de chacune des surfaces et en les recollant ensemble par leur bord commun. Plus précisément, soit D_i un disque fermé dans S_i (i.e., $D_i \subset S_i$ est un sous-espace homéomorphe à D^2). Soit f un homéomorphisme du bord de D_1 au bord de D_2. Alors

$$S_1 \# S_2 = (S_2 - \operatorname{int} D_2) \cup_f (S_1 - \operatorname{int} D_1).$$

Remarque. Il est possible de montrer que la classe d'homéomorphisme de la surface ainsi obtenue dépend uniquement des classes d'homéomorphisme de S_1 et S_2 et non des choix de D_1, D_2 ou f. L'ensemble des classes d'homéomorphismes de surfaces, muni de l'opération de somme connexe, forme un demi-groupe avec S^2 comme identité.

On restreint maintenant notre attention aux surfaces *compactes*.

Exercice 19. Essayez de vous convaincre que la somme connexe de surfaces compactes est aussi compacte.

On va définir deux familles de surfaces compactes, notées Σ_g et Ξ_g. Ce sont respectivement les surfaces *orientables* et *non orientables* de genre g.

Définition. Soit $\Sigma_0 = S^2$, la sphère. Soit $\Sigma_1 = S^1 \times S^1 = T^2$, le tore. On définit récursivement la **surface orientable de genre** g de la manière suivante :

$$\Sigma_g = \Sigma_{g-1} \# \Sigma_1 = \Sigma_{g-1} \# T^2, \quad g \geq 1.$$

Définition. Soit $\Xi_1 = \mathbb{R}P^2$, le plan projectif. On définit récursivement la **surface non orientable orientable de genre** g de la manière suivante :

$$\Xi_g = \Xi_{g-1} \# \Xi_1 = \Xi_{g-1} \# \mathbb{R}P^2, \quad g \geq 1.$$

Ainsi, la surface orientable de genre $g \geq 1$ est la surface obtenue en collant g tores ensembles : c'est le tore à g trous. La surface non orientable de genre $g \geq 1$ est celle obtenue en collant g plans projectifs ensemble.

Voici le théorème tant attendu :

Théorème 1.8. *Soit S une surface connexe et compacte. Alors S est homéomorphe à exactement un des Σ_g ou Ξ_g, dépendamment de si elle est orientable ou non. On appelle g le* ***genre*** *de S.*

2 Une preuve topologique/combinatoire

On procède en deux étapes : d'abord, on montre que nos candidats de surfaces se découpent en polygones ayant une forme particulière. Ces polygones sont en quelque sorte des « formes canoniques » pour nos surfaces. Ensuite, on montre que toute surface compacte est homéomorphe à exactement un de ces polygones canoniques.

2.1 Polygones et triangulations

Définition. Soit S une surface. Une **présentation polygonale** pour S est un mot de longueur paire, disons $2n$, satisfaisant la condition que si une lettre a apparait, alors exactement une occurrence de a ou a^{-1} apparait une autre fois. On requiert alors que la surface soit homéomorphe à un quotient du polygone régulier à $2n$ côtés dont les côtés sont orientés et étiquetés par les lettres du mot, de telle manière à ce que, en partant d'un sommet et en faisant le tour du polygône et en inscrivant tour à tour les lettres correspondant aux arêtes qu'on traverse (ou l'inverse de la lettre si on va en direction opposée), on obtienne le mot. Le quotient identifie les côtés correspondant à la même lettre, de telle manière à ce que leur orientation coïncide après l'identification.

Exemples. Voici quelques présentations polygonales :

(1) La sphère S^2 : aa^{-1}.

(2) Le tore T^2 : $aba^{-1}b^{-1}$.

(3) Le plan projectif $\mathbb{R}P^2$: aa.

(4) La bouteille de Klein : $aba^{-1}b$.

Exemples au tableau : présentations polygonales pour les familles Σ_g et Ξ_g. Nos formes canoniques sont donc :

(1) Σ_0 : aa^{-1}.

(2) Σ_g : $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$.

(3) Ξ_g : $a_1a_1\cdots a_ga_g$.

Il faut maintenant montrer que toute surface admet une présentation polygonale qui peut se réduire à l'une des formes ci-dessus. Pour cela, on a besoin du fait que toute surface compacte admet une triangulation.

Définition. Une **triangulation** d'une surface compacte S est un recouvrement de S par un nombre fini d'ensembles fermés T_i, appelés des triangles, munis d'homéomorphismes $\phi_i : T_i' \to T_i \subset S$ où chaque $T_i' \subset \mathbb{R}^2$ est un triangle du plan (i.e. une région compacte délimitée par trois segments de droites distincts). On appelle « arêtes » et « sommets » les sous-ensembles des T_i correspondant aux arêtes et aux sommets des T_i'. On requiert que deux triangles s'intersectent soit en un seul sommet, soit en une seule arête.

Remarque. Il découle du fait que S est un espace localement euclidien que chaque arête d'une triangulation de S borde exactement deux triangles.

Théorème 2.1 (Radó, 1925)**.** *Toute surface compacte admet une triangulation.*

La preuve de ce théorème est assez technique et fastidieuse ; on va donc s'en passer. Les intéressés peuvent consulter [5].

2.2 Preuve que toute surface admet une présentation polygonale

Soit S une surface connexe et compacte, et fixons une triangulation $T_1, \cdots, T_n$. J'affirme qu'il est possible de réordonner les triangles de telle manière à ce que *T_i contienne une arête e_i qui appartient à $T_1, \ldots, T_{i-1}$ pour* $2 \leq i \leq n$. Commençons par prendre T_1 arbitrairement. Alors on prend T_2 qui partage une arête e_2 avec T_1, puis T_3 qui partage une arête e_3 avec T_1 ou T_2, et ainsi de suite. Si ce processus s'arrêtait à T_k, on aurait deux familles de triangles $(T_1, \ldots, T_k)$ et $(T_{k+1}, \ldots, T_n)$ qui ne partageraient aucune arête. Par la remarque ci-dessus, on aurait donc une partition de S en deux fermés disjoints, ce qui contredirait la connexité de S.

Maintenant, on utilise la triangulation nouvellement réordonnée pour construire un polygone euclidien qui, après identifications, est homéomorphe à S. Il suffit de coller les images euclidiennes des T_i le long des arêtes e_i qui leur sont communes. Plus précisément, on peut supposer que les $T'_i = \phi_i^{-1}(T_i)$ forment un ensemble de triangles dans le plan qui sont disjoints deux à deux (au risque de modifier un peu les ϕ_i pour translater les triangles). Notons $T' = T'_1 \sqcup \cdots \sqcup T'_n$ cet union disjoint. Alors l'application $\phi : T' \to S$ définie sur ses composantes par $\phi|_{T'_i} = \phi_i$ est continue et surjective. De plus, le domaine est compact et le codomaine est Hausdorff, d'où ϕ est une application quotient et S a la topologie quotient déterminée par ϕ.

Soit $D = T'/\!\sim$ l'espace obtenu en recollant les T'_i le long des arêtes e_i. Plus précisément, on a par construction que la préimage par ϕ toute arête e_i consiste en deux arêtes : une arête de T'_i et une arête de T'_j pour $j < i$. On pose alors que $x \sim y$ si $x \in T'_i$, $y \in T'_j$ et $\phi(x) = \phi(y)$. L'application ϕ induit une application continue et surjective $\psi : D \to S$, qui est aussi une application quotient (pour les mêmes raisons). De plus, D est homéomorphe à un disque, puisque c'est un espace obtenu en collant un nombre fini de triangles les uns sur les autres le long de leur bord (un triangle est un disque, topologiquement). Ce disque D est le polygone désiré. En laissant tomber les arêtes e_i (qui sont à l'intérieur du polygone), il ne reste plus qu'à analyser les façons dont on peut identifier les arêtes et les sommets sur le bord du polygone.

2.3 Preuve que toute présentation polygonale se réduit à un de nos modèles

Cette partie se fait en quatre étapes ; voici un très court résumé (cf. [3]) :

(1) Élimination des paires d'arêtes du premier type.
En arrêtant ici, on obtient Σ_0 ou Ξ_1.

(2) Transformation en un polygone dont tous les sommets doivent être identifiés.

(3) Transformation en un polygone dont toutes les paires d'arêtes du second type sont adjacentes.
Il y a possibilité d'arrêter ici et d'obtenir Ξ_n.

(4) Étude des paires d'arêtes du premier type.
On obtient soit Σ_n, ou $\Xi_i \# \Sigma_j \cong \Xi_{i+2j}$.

Pour la dernière partie, on a besoin du lemme suivant (qui est un résultat intéressant en soi) :

Lemme 2.2. *La somme connexe d'un tore avec un plan projectif* $\mathbb{R}P^2$ *est homéomorphe à la somme connexe d'une bouteille de Klein avec un plan projectif, qui est homéomorphe à la somme connexe de trois plans projectifs. Autrement dit,* $\Sigma_1 \# \Xi_1 \cong K \# \Xi_1 \cong \Xi_3$.

Démonstration. Au tableau. □

3 Une preuve de topologie différentielle

L'idée est de voir nos surfaces S comme des variétés lisses (i.e., des 2-variétés munies d'une structure différentiable qui nous permet de dériver des fonctions $f : S \to \mathbb{R}$) et d'analyser le comportement local une fonction lisse f « générique », appelée fonction de Morse (on dit qu'une fonction est *lisse* si ses dérivées de tous les ordres existent).

Définition. Soit $f : S \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. On dit que $p \in S$ est un **point critique** si la dérivée de f s'annule en p. Ce point critique est dit **non dégénéré** si la hessienne de f est non singulière en p.

Remarque. Puisqu'on considère des surfaces compactes, il y aura seulement un nombre fini de points critiques.

Évidemment, ceci est assez informel pour nous puisqu'on n'a pas rigoureusement défini la dérivée de f. L'idée est la suivante : dire que S est lisse, c'est demander que les applications de transition entre les différentes cartes qui recouvrent notre surface soient des difféomorphismes (i.e., des bijections lisses d'inverse lisse). Ceci nous permet de dire qu'une fonction $f : S \to \mathbb{R}$ est **lisse** si son expression locale dans toute carte est lisse (en tant que fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$). Dans ce cas, si f est lisse, on peut prendre n'importe quelle carte (U, ϕ), disons $\phi(x) = (u(x), v(x))$, et donner un sens aux expressions $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$.

Définition. L'**indice** $i(p)$ d'un point critique $p \in S$ est la dimension du sous-espace vectoriel (de l'espace tangent à ce point) le plus gros sur lequel la hessienne est définie négative.

Cette théorie est grandement motivée un exemple. Considérons le tore $S = T^2$ plongé verticalement dans $\mathbb{R}^3$, et soit $f : S \to \mathbb{R}$ la fonction « hauteur. » Cette fonction est lisse, et elle possède quatre points critiques non dégénérés ; ce sont, en allant du bas vers le haut : le point de hauteur minimale, les deux points-selles, et le point de hauteur maximale. Leurs indices sont respectivement 0,1,1, et 2. Intuitivement, l'indice est donc le nombre de directions indépendantes dans lesquelles on va vers le bas. Le lemme suivant dit que ce scénario n'est pas particulier à l'exemple du tore plongé dans $\mathbb{R}^3$ (du moins localement) :

Théorème 3.1 (Lemme de Morse)**.** *Autour des points critiques $p \in S$, il existe des cartes où l'expression locale de f prend la forme*

(1) $f(u, v) = u^2 + v^2 +$ *constante, si* $i(p) = 0$.

(2) $f(u, v) = u^2 - v^2 +$ *constante, si* $i(p) = 1$.

(3) $f(u, v) = -u^2 - v^2 +$ *constante, si* $i(p) = 2$.

Démonstration. Voir [4]. □

L'idée est donc de « balayer » une surface connexe et compacte S à l'aide d'une fonction lisse assez générique $f : S \to \mathbb{R}$, qui sera alors Morse. De plus, si f est suffisamment générique, on aura que les valeurs $f(p)$ associées aux points critiques p (appelées **valeurs critiques**) seront toutes distinctes. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit les **surfaces de sous-niveau**

$$S_t = \{x \in S \mid f(x) \leq t\}.$$

L'intérêt de ces surfaces (à bord) est que, si t varie sur un intervalle *ne contenant aucune valeur critique*, alors les surfaces de sous-niveau qui résultent sont homéomorphes (même difféomorphes). Intuitivement, si $t_1 < t_2$, on pousse le long du gradient de f pour déformer S_{t_2} en S_{t_1}.

On s'intéresse donc au comportement de f très près des points critiques. Si t_0 est une valeur critique, on veut donc voir comment passer de $S_{t_0-\epsilon}$ à $S_{t_0+\epsilon}$ pour un petit $\epsilon > 0$. On voit relativement aisément que les procédures sont :

(1) Ajouter une nouvelle composante connexe qui est un disque (indice 0).

(2) Attacher une bande le long de cercles qui bordent la surface (indice 1).

(3) Attacher un disque le long d'un cercle qui borde la surface (indice 2).

La stratégie est alors de classifier toutes les surfaces compactes à bord (pas nécessairement connexes). On prend comme classe modèle toutes les unions disjointes finies de $\Sigma_{g,r}$ et $\Xi_{g,r}$ (incluant l'ensemble vide), où le nouvel indice r signifie qu'on a supprimé r disques de la surface. Puis, on montre que cette classe de surfaces est fermée pour les trois opérations ci-dessus. On note ici les possibilités :

(1) Indice 0 : on ajoute des composantes $\Sigma_{0,1}$, OK.

(2) Indice 2 : les composantes $\Sigma_{g,r}$ deviennent $\Sigma_{g,r-1}$ et les composantes $\Xi_{g,r}$ deviennent $\Xi_{g,r-1}$, OK.

(3) Indice 1 : on a deux sous-cas :

  (3.i) Les bandes s'attachent sur deux composantes connexes différentes. Si les composantes sont $A = A' - D^2$ et $B = B' - D^2$, on obtient $(A' \# B') - D^2$.

  (3.ii) Les bandes s'attachent sur la même composante connexe. Ici on a encore des sous-cas, qui se sous-divisent eux-même en sous-cas dépendamment de si on attache les bandes avec ou sans torsion :

(3.ii.a) Les bandes s'attachent sur la même composante de bord. Si la composante connexe est $A = A' - D^2$, on obtient $A' - 2D^2$ dans le cas non tordu, et $(A \# \mathbb{R}P^2) - D^2$ dans le cas tordu.

(3.ii.b) Les bandes s'attachent sur des composantes de bord distinctes. Si la composante connexe est $A = A' - 2D^2$, on obtient $(A' \# T^2) - D^2$ dans le cas non tordu, et $(A' \# K) - D^2$ dans le cas tordu.

Dans tous les cas, le lemme 2.2 nous donne la classification attendue. Pour plus de détails, vous pouvez consulter [1] et [2].

Références

[1] Simon Kirwan Donaldson. *Riemann Surfaces*. T. 22. Oxford University Press Oxford, 2011.

[2] Morris W Hirsch. *Differential Topology*. T. 33. Springer-Verlag New York, 1976.

[3] William S Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*. T. 127. Springer, 1991.

[4] John Willard Milnor. *Morse Theory*. 51. Princeton University Press, 1963.

[5] Edwin E Moise. *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*. Springer, 1977.