Représentations, caractères

Représentations unitaires, produits scalaires

Rep ϕ est **unitaire** si $\langle \phi_g(v), \phi_g(w)\rangle = \langle v, w\rangle$. Alors ϕ prend valeur dans $\mathrm{U}(n) = \{AA^* = I\}$.

Dans une base (u_i), un produit scalaire est équivalent à une matrice **hermitienne** ($A = A^*$) définie-positive (donc inversible) via $A_{ij} = \langle u_i, u_j\rangle$ et $\langle u, v\rangle = [u]^* A[v]$.

Toute rep est **équivalente à une unitaire** : utiliser le produit scalaire

$$(v, w) = \sum_{g\in G} \langle \phi_g(v), \phi_g(w)\rangle.$$

Sous-rep, morphismes

$W \subset V$ est **sous-rep** si $gW \subset W$. Une rep qui n'admet pas de sous-rep propres et non-triviales est **irréductible**.

Rep ϕ de degré 2 est irréductible ssi il n'existe pas de vecteur propre commun à tous les ϕ_g.

Un **morphisme** de rep est une application linéaire $T : V \to W$ tel que $T(g \cdot v) = g \cdot T(w)$.

Les noyaux et images de morphismes sont des sous-représentations.

Lemme de Schur : Si ϕ, ρ irréductibles, alors $T \in \mathrm{Hom}_G(\phi, \rho)$ est soit inversible ou $T = 0$. (Le premier arrive si $\phi \sim \rho$, et alors $T = \lambda I$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de T. Dans ce cas la dimension de $\mathrm{Hom}_G(\phi, \rho)$ est 1.)

Groupes abéliens

Toute rep irréductible d'un groupe *abélien* a degré 1.

Tout groupe abélien fini est isomorphe à un produit de groupes cycliques. Si $n = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ alors $\mathbb{Z}/n \cong \mathbb{Z}/p_1^{r_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_s^{r_s}$

Soient G_1, G_2 groupes abéliens et $\chi_1, \ldots, \chi_m$, $\phi_1, \ldots, \phi_n$ rep irréd de G_1, G_2. Alors

$$\alpha_{ij}(g_1, g_2) = \chi_i(g_1)\phi_j(g_2)$$

ensemble complet de rep irréd de $G_1 \times G_2$.

G est abélien ssi $|G| = |\mathrm{Cl}(G)|$ ssi il a $|G|$ classes de rep irréductibles.

Rep irréd de $\mathbb{Z}/n$: soit $\omega_n = e^{2\pi i/n}$. Alors $\chi_k([m]) = \omega_n^{km}$ pour $0 \le k \le n-1$ sont les rep irréd distinctes de $\mathbb{Z}/n$.

Diagonalisabilité, racines n-ièmes

G abélien fini et ϕ rep matricielle. Alors $\exists$ matrice T inversible tq $T^{-1}\phi_g T$ est diagonale $\forall g$.

Toute matrice inversible d'ordre fini est diagonalisable ; de plus, si $A^n = I$ alors les valeurs propres de A sont des racines n-ièmes de l'unité.

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ racines n-ièmes de l'unité, alors

$$|\sum_i \lambda_i| \le d$$

avec égalité ssi tous les λ_i sont égaux.

Relations d'orthogonalité

Produit scalaire sur l'espace des fonctions $\mathbb{C}^G$ est

$$\langle f_1, f_2\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}.$$

Relations d'orthogonalité de Schur : soient $\phi : G \to U_n$ et $\rho : G \to U_m$ irréd, unitaires, non équivalentes. Alors $\langle \phi_{ij}, \rho_{kl}\rangle = 0$ et $\langle \phi_{ij}, \phi_{kl}\rangle = 1/n$ si $i = k$ et $j = l$ (0 sinon).

Si ϕ irréd unitaire de degré d, alors les d^2 fonctions $\langle \sqrt{d}\phi_{ij} \mid 1 \le i, j \le d\}$ forment un ensemble orthonormal.

Si $\phi^1, \ldots, \phi^s$ ensemble complet de rep irréd et d_i leur degré, les fonctions $\{\sqrt{d_k}\phi^k_{ij} \mid 1 \le k \le s, 1 \le i, j \le d_k\}$ forment un ensemble orthonormal dans $\mathbb{C}^G$. Donc

$$s \le \sum d_i^2 \le |G|$$

La première inégalité est toujours une égalité quand G est abélien, et la deuxième est toujours une égalité.

Si ϕ, ρ irréd, alors $\langle \chi_\phi, \chi_\rho\rangle = 1$ ssi $\phi \sim \rho$ (sinon 0).

Soit $\phi^1, \ldots, \phi^s$ ensemble complet d'irréd. Soit $\rho \sim m_1\phi^1 \oplus \cdots \oplus m_s\phi^s$. Alors $m_i = \langle \chi_\rho, \chi_{\phi^i}\rangle$. Donc la décomposition de ρ en composantes irréd est unique et ρ est déterminé par son caractère modulo équivalence.

Rep ρ irréd ssi $\langle \chi_\rho, \chi_\rho\rangle = 1$.

Rep irréd fois une rep de degré 1 reste irréd.

Rep regulière

La rep régulière est fidèle (donc pas somme de rep triviales seulement) et unitaire p/r au produit $\langle \sum_x a_x x, \sum_x b_x x\rangle = \sum_x a_x \overline{b_x}$ sur $\mathbb{C}X$.

Son caractère est donné par $\chi(g) = |G|$ si $g = e$ (0 sinon).

Soit $\phi^1, \ldots, \phi^s$ ensemble complet d'irréd unitaires et d_i leur degré ; alors la rep regulière $\sim d_1\phi^1 \oplus \cdots d_s\phi^s$.

L'ensemble $\{\sqrt{d_k}\phi^k_{ij} \mid 1 \le k \le s, 1 \le i, j \le d_k\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{C}^G$.

L'ensemble $\chi_1, \ldots, \chi_s$ est une base orthonormale de $Z(L(G))$ (fonctions de classes).

Soient C, C' classes de conj de G et $g \in C$, $h \in C'$. Alors $\sum_{i=1}^s \chi_i(g)\overline{\chi_i(h)} = |G|/|C|$ si $C = C'$ (0 sinon).

Lemme de Burnside, dimension

Si ϕ irred de degré d, alors d divise $|G|$.

Le nombre de rep de degré 1 divise $|G|$. En fait G a $[G : G']$ rep de degré 1.

G groupe d'ordre $p^a q^b$ avec p, q premiers. Alors G n'est pas simple sauf s'il est cyclique d'ordre premier.

Induction

De $Z(L(H))$ à $Z(L(G))$: $\mathrm{Ind}_H^G f(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G} f(x^{-1}gx)$.

Réciprocité de Frobenius : $\langle \mathrm{Ind}_H^G a, b\rangle = \langle a, \mathrm{Res}_H^G b\rangle$ lorsque $a \in Z(L(H))$ et $b \in Z(L(G))$.

Tables

S_3

	Id	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

S_4

	Id	(1 2)	(1 2 3)	(1 2 3 4)	(1 2)(3 4)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	1
χ_3	2	0	-1	0	2
χ_4	3	1	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	1	-1

$\mathbb{Z}/4$

	[0]	[1]	[2]	[3]
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1
χ_3	1	i	-1	$-i$
χ_4	1	$-i$	-1	i

$\mathbb{Z}/2$

	[0]	[1]
χ_1	1	1
χ_2	1	-1

$\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$

	([0], [0])	([0], [1])	([1], [0])	([1], [1])
α_{11}	1	1	1	1
α_{12}	1	-1	1	-1
α_{21}	1	1	-1	-1
α_{22}	1	-1	-1	1

Quaternions (ou D_8)

	1	-1	$\hat{\imath}$	$\hat{\jmath}$	$\hat{k}$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0