Produits vectoriels dans $\mathbb{R}^n$

Alex Provost

Mars 2022

1 Introduction

Un analogue du produit vectoriel n'existe que dans $\mathbb{R}^7$ (en plus de $\mathbb{R}^3$). Je veux présenter quelques résultats qui mènent à cette conclusion. Je ne pourrai pas tout démontrer en détail mais je vais tenter d'expliquer certaines idées importantes. Je suis de très près l'article de Massey [3].

L'idée générale derrière la classification des produits vectoriels est d'établir une correspondance biunivoque entre les « produits vectoriels » dans une dimension et les « produits réguliers » dans une dimension de plus (termes vagues à définir !). Une restriction sur les dimensions possibles des produits réguliers, soit par l'algèbre ou la topologie, mènera ensuite à une restriction sur les dimensions possibles pour les produits vectoriels. Commençons par les produits réguliers.

2 Algèbres de composition

Définition. Une **algèbre de composition sur** $\mathbb{R}$ est une algèbre unitaire $(A, +, \cdot, 1)$, pas forcément associative, munie d'une forme quadratique non dégénérée Q qui est multiplicative au sens où $Q(xy) = Q(x)Q(y)$. (Dans le temps, on disait alors que « Q permet la composition ».)

Remarque. Une forme quadratique donne toujours lieu à une forme bilinéaire symétrique associée $B(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$.

Dans une algèbre de composition, on a toujours une involution $x \mapsto \bar{x}$ donnée par $\bar{x} = B(x, 1)1-x$ (géométriquement : le vecteur opposé à la réflexion de x dans l'hyperplan orthogonal à 1), qui satisfait $\bar{x}x = Q(x)1 = x\bar{x}$ et $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$.

Des calculs algébriques lourds mais élémentaires (voir Jacobson [2]) permettent de montrer qu'une algèbre de composition est *alternative* au sens où $(xx)y = x(xy)$ et $y(xx) = (yx)x$, et réciproquement toute algèbre alternative munie d'une involution ayant les propriétés ci-dessus et d'une forme quadratique non-dégénérée est une algèbre de composition.

Exemples. (1) Les exemples classiques sont les réels, les complexes, les quaternions et les octonions avec leurs produits respectifs. La forme quadratique est alors $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_i x_i^2$.

(2) Il existe des algèbres de composition « coquaternioniques » et « cooctonioniques », de dimension 4 et 8 respectivement, qui ne sont pas isomorphes aux quaternions et octonions respectivement. Pour les construire, on peut généraliser la construction classique de Cayley–Dickson en introduisant un k-doublement (voir ci-dessous), k étant un élément non nul du corps sous-jacent. Mais il devrait déjà être très satisfaisant de réaliser que l'algèbre $A = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ des matrices réelles carrées d'ordre deux forme une algèbre coquaternionique, avec forme quadratique $Q(X) = \det X$.

En fait, il n'existe pas beaucoup d'algèbres de composition : c'est le théorème d'Hurwitz. L'outil principal est la notion de k-doublement :

Définition. Soit $k \neq 0$ et soit A une algèbre de composition. Le k-doublement $D_k(A)$ est une algèbre ayant comme espace vectoriel sous-jacent la somme directe $A \oplus A$, avec la multiplication

$$(u, v)(x, y) = (ux + k\bar{y}v, yu + v\bar{x}).$$

Donc $\dim D_k(A) = 2 \dim A$. L'algèbre originale A se plonge naturellement dans $D_k(A)$ comme sous-algèbre via $x \mapsto (x, 0)$. Les propriétés de A s'étendent à des propriétés analogues de $D_k(A)$ de la manière suivante :

— L'unité est $(1, 0)$.

— La forme quadratique non-dégénérée est $Q(x, y) = Q(x) - kQ(y)$.

— L'involution est $\overline{(x, y)} = (\bar{x}, -y)$.

Proposition 2.1. *(1) $D_k(A)$ est commutative et associative $\iff$ A est commutative et associative et son involution est triviale ($\bar{x} = x$).*

(2) $D_k(A)$ est associative $\iff$ A est commutative et associative.

(3) $D_k(A)$ est alternative $\iff$ A est associative.

Exemple. Les (-1)-doublements successifs (construction de Cayley–Hamilton) obtenus à partir de $\mathbb{R}$ donnent les complexes, les quaternions, les octonions, les sédénions, etc. Puisque les octonions ne sont pas associatifs, les sédénions ne sont pas alternatifs ; ils ne forment donc pas une algèbre de composition.

Exemple. Les 1-doublements, eux, appliqués aux complexes et aux quaternions respectivement, mènent aux coquaternions et cooctonions mentionnés plus haut.

Proposition 2.2. *Soit A une algèbre de composition, et soit $C \subsetneq A$ une sous-algèbre propre contenant 1 et stable sous l'involution de A (i.e. $\bar{C} \subset C$) telle que la restriction de la forme quadratique de A à C soit non-dégénérée. Alors C peut être plongée dans une sous-algèbre $D \subset A$ satisfaisant les mêmes conditions que C, avec $D \cong D_k(C)$.*

Théorème 2.3 (Hurwitz, 1923)**.** *Sur un corps K de caractéristique $\neq 2$, voici la liste complète des algèbres de composition sur K : a) Le corps K comme algèbre sur lui-même. b) Une algèbre quadratique (un doublement de K). c) Une algèbre quaternionique (un doublement d'une algèbre quadratique). d) Une algèbre octonionique (un doublement d'une algèbre quaternionique).*

Démonstration. Soit A une algèbre de composition sur K. On applique la proposition précédente à répétition en commençant par $C = K$, jusqu'à ce qu'éventuellement le doublement coïncide avec A. Ça doit éventuellement arriver, parce que sinon A contient le doublement d'une algèbre octonionique, qui n'est pas alternative. Mais A est alternative, donc toute sous-algèbre doit l'être également. $\square$

Pour conclure cette section, je trouve qu'il est intéressant de faire le contraste entre cette approche très algébrique et une approche complètement différente, topologique. J'ai pris connaissance de ce merveilleux résultat il y a plusieurs années dans le livre de Milnor–Stasheff [4] :

Théorème 2.4 (Stiefel)**.** *S'il existe une opération de produit de vecteurs $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (pas nécessairement associative) qui est bilinéaire et ne possède pas de diviseurs de zéros, alors l'espace projectif $\mathbb{RP}^{n-1}$ est parallélisable, et donc par un calcul de classes caractéristiques n est une puissance de 2.*

3 Produits vectoriels

Définition. Soit $n \geq 3$. Un **produit vectoriel (au sens fort ou algébrique)** est une opération

$$\times : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

satisfaisant les propriétés classiques suivantes :

(1) Le produit $\times$ est bilinéaire : $u \times (v + kw) = u \times v + k(u \times w)$ et pareil de l'autre côté.

(2) $u \times v$ est orthogonal à u et v : $(u \times v) \cdot u = 0 = (u \times v) \cdot v$.

(3) La norme du produit vectoriel est l'aire du parallélogramme engendré par ses arguments : $|u \times v|^2 = |u|^2|v|^2 - (u \cdot v)^2$.

La clé du problème est de réaliser qu'un tel produit sur $\mathbb{R}^n$ induit une structure d'algèbre de composition sur $\mathbb{R}^{n+1}$ en « ajoutant formellement une unité ». Voyons $\mathbb{R}^{n+1}$ comme somme directe orthogonale $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$, au sens où $|(a, u)|^2 = a^2 + |u|^2$. Inspiré par le lien entre le produit de quaternions et le produit vectoriel classique, on pose

$$(a, u)(b, v) = (ab - u \cdot v, av + bu + u \times v).$$

Cette multiplication est toujours bilinéaire, mais maintenant $(1, 0)$ joue le rôle d'unité. On peut également récupérer le produit vectoriel original en ne considérant que la « partie imaginaire » $\mathbb{R}^n = 0 \oplus \mathbb{R}^n$. Finalement, $Q(a, u) = |(a, u)|^2 = a^2 + |u|^2$ est une forme quadratique non-dégénérée multiplicative (exercice !). Donc par le théorème d'Hurwitz, $\mathbb{R}^{n+1}$ est une algèbre de composition isomorphe à $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$, et on peut récupérer le produit vectoriel en ne considérant que la partie imaginaire.

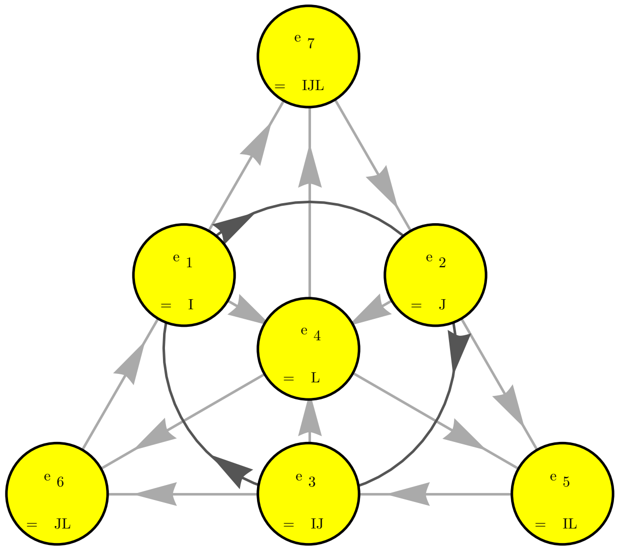
Exemple. On peut voir $\mathbb{R}^7$ comme la partie imaginaire de $\mathbb{R}^8 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^7$, et on peut voir $\mathbb{R}^8$ comme le (-1)-doublement des quaternions. De ce point de vue, une base naturelle à utiliser pour les octonions est

$$\langle e_0, e_1, \ldots, e_7 \rangle = \langle (1, 0), (i, 0), (j, 0), (k, 0), (0, 1), (0, i), (0, j), (0, k) \rangle.$$

En utilisant la formule ci-dessus pour la multiplication dans le doublement, on peut calculer le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^7$. Par exemple,

$$e_6 \times e_1 \leftrightarrow (0, j)(i, 0) = (0, j\bar{i}) = (0, k) \leftrightarrow e_7.$$

On peut visualiser le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^7$ à l'aide du plan de Fano, illustré ci-dessous. Pour multiplier deux éléments de base, on regarde le prochain élément sur l'unique droite passant par les deux éléments qu'on multiplie. On obtient toutes les possibilités par des permutations cycliques (qui n'affectent pas le produit) et l'anticommutativité.



En acceptant des résultats difficiles de topologie algébrique, on peut renforcer ce résultat :

Définition. Soit $n \geq 3$. Un **produit vectoriel (au sens faible ou topologique)** est une opération

$$\times : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

satisfaisant les propriétés suivantes :

(1) Le produit $u \times v$ est une fonction continue de la paire (u, v).

(2) $u \times v$ est orthogonal à u et v : $(u \times v) \cdot u = 0 = (u \times v) \cdot v$.

(3) Si u et v sont linéairement indépendants alors $u \times v \neq 0$.

Soit $A(u, v) = \left(|u|^2|v|^2 - (u \cdot v)^2\right)^{1/2}$ l'aire du parallélogramme engendré par $u, v \in \mathbb{R}^n$; c'est une fonction continue de la paire (u, v). On en déduit une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$f(u, v) = \begin{cases} \dfrac{A(u, v)}{|u \times v|}(u \times v) & \text{si } u \times v \neq 0 \\ 0 & \text{si } u \times v = 0 \end{cases}$$

qui satisfait les propriétés suivantes :

— $f(u, v) \cdot u = 0 = f(u, v) \cdot v$.

— $|f(u, v)|^2 = |A(u, v)|^2 = |u|^2|v|^2 - (u \cdot v)^2$.

La fonction f possède donc les propriétés algébriques du produit vectoriel classique, sauf la bilinéarité.

Exactement comme avant, on en déduit une multiplication continue sur $\mathbb{R}^{n+1}$ donnée par

$$\mu[(a, u), (b, v)] = (ab - u \cdot v, av + bu + f(u, v)).$$

Cette multiplication admet encore $(1, 0)$ comme unité et satisfait encore $|\mu(x, y)|^2 = |x|^2|y|^2$, grâce aux propriétés de f analogues à celles du produit vectoriel. Cette dernière équation montre que μ induit par restriction une multiplication continue et unitaire sur la sphère $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\mu|_{S^n} : S^n \times S^n \to S^n.$$

Pour ces valeurs de n la sphère devient donc un « magma unitaire topologique », ce qu'on appelle de nos jours un H-espace en l'honneur de Hopf. La question devient alors : pour quelles valeurs de n la sphère S^n est-elle un H-espace ? C'est un problème classique et très difficile de topologie algébrique qui n'a été résolu qu'en 1958 par Adams [1] : les seules valeurs possibles sont $n = 1, 3$, et 7. Encore une fois on arrive donc à la conclusion que le produit vectoriel, malgré des hypothèses encore moins restrictives dans sa définition, ne peut exister que dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^7$.

Références

[1] John F. ADAMS. « On the Nonexistence of Elements of Hopf Invariant One ». In : *Ann. of Math.* (1960).

[2] Nathan JACOBSON. *Basic Algebra 1*. W. H. Freeman et Company, 1985.

[3] William S. MASSEY. « Cross Products of Vectors in Higher Dimensional Euclidean Spaces ». In : *The American Mathematical Monthly* (1983).

[4] John W. MILNOR et James D. STASHEFF. *Characteristic Classes*. Princeton University Press et University of Tokyo Press, 1974.