

Groupes topologiques abéliens

Définition. On dit qu'un groupe abélien $(G, +)$ est un *groupe topologique* si G est muni d'une topologie telle que l'addition $(x, y) \mapsto x + y$ et la prise d'inverses $x \mapsto -x$ sont des opérations continues.

Remarque. Si $\{0\}$ est fermé dans G , alors la diagonale $\Delta = \{(x, x) \in G \times G\}$ est fermée dans $G \times G$ (étant la préimage de $\{0\}$ sous l'opération continue $(x, y) \mapsto x - y$), ce qui entraîne que G est Hausdorff.

En fait, la topologie de G est entièrement déterminée par les voisinages de $0 \in G$. En effet, si a est un élément fixé de G , la translation $T_a(x) = x + a$ est clairement un homéomorphisme $G \rightarrow G$ d'inverse T_{-a} . Ceci entraîne que si U est n'importe quel voisinage de 0 , alors $U + a$ est un voisinage de a ; réciproquement, tout voisinage de a est de cette forme. *Donc, pour simplifier l'écriture, on va simplement écrire* voisinage *pour dire* voisinage de 0 .

Complétude topologique

À toute fin pratique, on va supposer que $0 \in G$ admette une base de voisinages *dénombrable*, i.e., une famille $G = U_0 \supseteq U_1 \supseteq \dots \supseteq U_n \supseteq \dots \supseteq \{0\}$ de voisinages telle que tout voisinage contienne au moins un des U_i . On peut alors définir la complétude topologique au sens usuel en terme des suites de Cauchy.

Définition. Une *suite de Cauchy* dans G est une suite (x_ν) d'éléments de G telle que, pour tout voisinage U , il existe un entier $s(U)$ tel que

$$x_\mu - x_\nu \in U, \quad \forall \mu, \nu \geq s(U).$$

On dit que deux suites de Cauchy sont *équivalentes* si $x_\nu - y_\nu \rightarrow 0$. La *complétude* de G , notée \widehat{G} , est l'ensemble des classes d'équivalences de suites de Cauchy dans G . La continuité de l'addition entraîne que pour tout voisinage U , il existe un voisinage V tel que $V + V \subseteq U$. On voit alors facilement que la somme de deux suites de Cauchy est aussi de Cauchy; de plus, la classe de $(x_\nu + y_\nu)$ ne dépend que des classes de (x_ν) et (y_ν) , d'où \widehat{G} est un groupe abélien.

On définit une topologie sur \widehat{G} via la base de voisinages de G . Plus précisément, pour chaque U_i , on définit \widehat{U}_i comme étant l'ensemble des classes dont les représentants sont éventuellement dans U_i . La topologie sur \widehat{G} est alors celle induite par la base de voisinages \widehat{U}_i .

Remarque. Si G est discret, alors deux suites de Cauchy sont équivalentes si et seulement si elles sont éventuellement égales, d'où $\widehat{G} \cong G$.

On a un homomorphisme continu de groupes abéliens $\phi : G \rightarrow \widehat{G}$ qui associe à tout élément la suite constante correspondante. Elle n'est pas forcément injective ; en fait on a par définition que

$$\text{Ker } \phi = \bigcap U,$$

où l'intersection est prise sur tous les voisinages U . On peut voir aisément que ϕ est injective $\iff \bigcap U = \{0\} \iff G$ est Hausdorff.

La complétude, comme la localisation, est fonctorielle : un homomorphisme continu $f : G \rightarrow H$ entre deux groupes topologiques abéliens envoie une suite de Cauchy dans G vers une suite de Cauchy dans H , et induit un homomorphisme $\widehat{f} : \widehat{G} \rightarrow \widehat{H}$ satisfaisant $\widehat{g} \circ f = \widehat{g} \circ \widehat{f}$.

Complétude algébrique

La construction précédente est assez générale et permet, par exemple, de compléter les nombres rationnels en les nombres réels. Cependant, nous allons maintenant nous restreindre à certaines classes de topologies particulières qui apparaissent fréquemment en algèbre commutative. À cette fin, nous imposons la condition supplémentaire que 0 admette une base dénombrable de voisinages *qui sont tous des sous-groupes*. On a donc une suite de sous-groupes

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_n \supseteq \dots \supseteq \{0\}$$

telle que U est un voisinage si et seulement si U contient un quelconque G_i .

Exemple. On peut penser aux entiers p -adiques, en prenant $G = \mathbb{Z}$ et $G_n = p^n \mathbb{Z}$.

On aimerait maintenant penser aux suites de Cauchy en termes plus algébriques. On remarque que si (x_ν) est une suite de Cauchy dans G , alors pour tout n on a $x_\mu - x_\nu \in G_n$ à partir d'un certain point, i.e. l'image de x_ν est éventuellement constante dans G/G_n . Notons cette image par ξ_n . Si

$$G/G_{n+1} \xrightarrow{\theta_{n+1}} G/G_n$$

est la projection qui envoie la classe d'un objet dans le premier quotient sur sa classe dans l'autre, il est clair qu'on a

$$\theta_{n+1} \xi_{n+1} = \xi_n \quad \text{pour tout } n.$$

Appelons une suite (ξ_n) de ce type une *suite cohérente*. Donc, toute suite de Cauchy donne lieu à une suite cohérente, et il est facile de voir que deux suites de Cauchy équivalentes donnent lieu à la même suite cohérente. Réciproquement, si (ξ_n) est une suite cohérente, on peut construire une suite de Cauchy (x_n) donnant lieu à (ξ_n) en posant $x_n = n$ 'importe quel élément de ξ_n . On a

alors $x_{n+1} - x_n \in G_n$ en vertu de la condition de cohérence, d'où (x_n) est bien de Cauchy.

On aurait donc aussi bien pu définir \widehat{G} comme l'ensemble des suites cohérentes, avec la structure de groupe évidente.

La construction ci-dessus est un cas particulier d'une *limite projective*. De manière générale, on appelle une suite $\{A_n\}$ de groupes abéliens avec des homomorphismes $\theta_{n+1} : A_{n+1} \rightarrow A_n$ un *système projectif* (de groupes abéliens). Le système est dit *surjectif* si tous les θ_i le sont.

Remarque. Le système $\{G/G_n\}$ est surjectif.

Définition. La *limite projective* du système $\{A_n\}$, notée $\varprojlim A_n$, est le groupe des suites cohérentes (a_n) (i.e., $a_n \in A_n$ et $\theta_{n+1}a_{n+1} = a_n$).

Avec cette terminologie, on a donc $\widehat{G} \cong \varprojlim G/G_n$.

La notion de limite projective nous permet d'étudier plus facilement les propriétés d'exactitude du foncteur de complétude. Soit $0 \rightarrow \{A_n\} \rightarrow \{B_n\} \rightarrow \{C_n\} \rightarrow 0$ une suite courte exacte de systèmes projectifs, i.e., un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_{n+1} & \longrightarrow & B_{n+1} & \longrightarrow & C_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Ce diagramme induit des homomorphismes

$$0 \rightarrow \varprojlim A_n \rightarrow \varprojlim B_n \rightarrow \varprojlim C_n \rightarrow 0,$$

mais cette suite est en général seulement exacte à gauche.

Proposition. *Le foncteur de limite projective est exact à gauche. Si le système $\{A_n\}$ est surjectif, alors le foncteur est exact.*

Démonstration. Posons $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$. Soit $d^A : A \rightarrow A$ l'homomorphisme défini sur chaque composante par $d^A(a_n) = a_n - \theta_{n+1}a_{n+1}$. On a alors $\text{Ker } d^A \cong \varprojlim A_n$. On définit B, C, d^B, d^C de manière analogue. La suite exacte de systèmes projectifs induit un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d^A & & \downarrow d^B & & \downarrow d^C & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Donc, par le lemme du serpent, on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ker } d^A \rightarrow \text{Ker } d^B \rightarrow \text{Ker } d^C \rightarrow \text{Coker } d^A \rightarrow \text{Coker } d^B \rightarrow \text{Coker } d^C \rightarrow 0.$$

Il reste à montrer que $\{A_n\}$ surjectif $\implies d^A$ surjectif, mais ceci est immédiat puisqu'il suffit de résoudre récursivement les équations

$$x_n - \theta_{n+1}x_{n+1} = a_n$$

pour $x_n \in A_n$, étant donné $a_n \in A_n$. Il suffit donc de prendre $x_0 = 0$, et $x_{i+1} = \theta_{i+1}^{-1}(x_i - a_i)$. \square

Corollaire. Soit $0 \rightarrow G' \rightarrow G \xrightarrow{p} G'' \rightarrow 0$ une suite exacte de groupes abéliens. Soit $\{G_n\}$ une suite de sous-groupes de G , et donnons à G la topologie induite par cette base de voisinages. Donnons à G', G'' les topologies induites, i.e., celles données par les suites $\{G' \cap G_n\}, \{pG_n\}$. Alors

$$0 \rightarrow \widehat{G'} \rightarrow \widehat{G} \rightarrow \widehat{G''} \rightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente aux suites exactes

$$0 \rightarrow \frac{G'}{G' \cap G_n} \rightarrow \frac{G}{G_n} \rightarrow \frac{G''}{pG_n} \rightarrow 0.$$

\square

Considérons le cas particulier où $G' = G_n$; puisque $G'' = G/G_n$ admet alors le singleton $\{0\}$ comme ouvert, G'' est discret, d'où $\widehat{G''} \cong G''$. En appliquant le corollaire à cette situation, on obtient donc que $\widehat{G_n}$ est un sous-groupe de \widehat{G} , et que

$$\widehat{G}/\widehat{G_n} \cong G/G_n.$$

En prenant les limites inverses, on obtient

$$\widehat{\widehat{G}} \cong \widehat{G}.$$

Définition. On dit que G est *complet* si $\phi : G \rightarrow \widehat{G}$ est un isomorphisme.

On vient donc de montrer que la complétude d'un groupe topologique est complète.

Les exemples les plus importants de groupes topologiques qu'on considère en algèbre commutative sont ceux obtenus en prenant $G = R$, $G_n = \mathfrak{p}^n$, où \mathfrak{p} est un idéal dans un anneau R . La topologie ainsi définie sur R est appelée la *topologie p-adique*. En fait, on obtient alors un *anneau topologique*, i.e., les opérations d'anneau sont continues.

Exemple. Soit $R = k[X]$, où k est un corps, et prenons $\mathfrak{p} = (X)$. On obtient alors $\widehat{R} = k[[X]]$, l'anneau des séries de puissances formelles.

Exemple. Soit $R = \mathbb{Z}$, et prenons $\mathfrak{p} = (p)$, où p est premier. Alors $\widehat{R} = \mathbb{Z}_p$ est l'anneau de entiers p -adiques. Ses éléments sont les séries infinies $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$, $0 \leq a_n \leq p - 1$. On a que $p^n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.